

## **APPROCCIO AL CONCETTO DI AREA CON PROBLEMI DEL RMT**

**Gruppo di lavoro n° 8, “ellealquadrato”<sup>1</sup>**

**Animatori: Clara Bisso (Genova), Lucia Grugnetti (coordinatore internazionale)**

### **Résumé**

En prenant en compte les éléments de la recherche en didactique qui concernent la construction du concept d'aire et des difficultés qui lui sont liées, le groupe de travail s'est proposé de chercher à répondre aux deux questions suivantes :

*1 – Parmi les problèmes du RMT, lesquels peuvent être utilisés en classe pour aborder la construction du concept d'aire ?*

*2 – Quelles sont les conditions didactiques les plus opportunes pour utiliser effectivement ces problèmes ?*

Les discussions du groupe de travail ont aussi abouti à la programmation d'une expérimentation sur le concept d'aire, dans des classes de l'école primaire et aux premiers degrés de l'école secondaire, expérimentations en cours actuellement.

## **1. COSTRUIRE CONCETTI CON L'USO DI PROBLEMI**

### **1.1 Introduzione alla problematica**

I termini «problema» e «risoluzione di problemi» non sono formule magiche che è sufficiente evocare perché si operi la costruzione delle nozioni matematiche sottese. La teoria delle situazioni didattiche lo spiega ampiamente: esiste un gioco sottile e complesso tra l'attività dell'allievo mentre risolve dei problemi e l'elaborazione delle sue conoscenze, influenzato dall'ambiente e orchestrato dall'insegnante. (Grugnetti, Jaquet, 2005)

In Douady-Perrin-Glorian (1989), vengono definite le condizioni perché un problema possa divenire sorgente di apprendimento:

(1) L'enunciato, contesto e domande, ha senso per gli allievi:

- il contesto fa riferimento ad un ambito familiare (scolastico o extra-scolastico).

---

<sup>1</sup> Vincenzo CANDOLFI (Riva del Garda), Anna Maria D'ANDREA (Udine), Maria MARCANTONI (Riva del Garda), Maria Antonietta RAPUANO (Milano), Michele RAPUANO (Lodi), Elvezio SARTORE (Ticino), Maria Francesca TANDA (Perugia), Donata TARDIO (Siena), Agnese TOMASINI (Parma),

- L'enunciato comporta delle domande: per gli allievi, la risposta non è evidente, ma sono capaci di pensare a quale possa essere la risposta, e questo indipendentemente dalla capacità di proporre una procedura di accesso ed una validazione.

- Tenuto conto delle loro conoscenze, gli allievi possono proporre una procedura di risoluzione e controllarne gli effetti.

(2) Gli allievi non possono risolvere completamente il problema per delle ragioni anche molto diverse: la procedura scelta è troppo lunga, sorgente di errori, incompatibile con il tempo a disposizione; bisognerebbe utilizzarla fuori dal suo campo noto di validità; non funziona fuori dall'ambito familiare di funzionamento. C'è contraddizione, o quantomeno conflitto tra quello che pensa l'allievo e quello che il problema gli richiede.

(3) Le conoscenze alle quali si mira per l'apprendimento (contenuto o metodo) sono degli strumenti adattati al problema.

(4) Il problema può essere formulato in almeno due ambiti [concettuali] differenti. Inoltre, perché la risoluzione del problema giochi un ruolo nella costruzione della conoscenza dell'allievo, è necessario che possa lavorare sotto la propria responsabilità. Questo presuppone che la situazione gli permetta di controllare la validità delle sue decisioni e delle sue produzioni senza cercare di ricorrere ad informazioni esterne al problema stesso per "cercare di indovinare" le attese dell'insegnante.

### 1.2 Approccio al concetto di area

Oltre a queste indicazioni generali per l'uso di problemi nell'approccio a concetti matematici, per quanto riguarda il concetto di area, in particolare, è necessario tener conto del fatto che prima del passaggio alla misura bisogna interessarsi alla grandezza, **L'area in quanto grandezza deve essere identificata prima di passare alla sua misura.** Vanno distinti chiaramente gli oggetti, le grandezze e le misure (si veda Rouche, 1992).

Secondo Douady-Perrin-Glorian (1989), è necessaria la distinzione fra il polo geometrico con le superfici considerate come parti del piano, il polo "grandezza" con le aree e il polo numerico con le misure. Il concetto di area in quanto grandezza, costituisce un legame tra le superfici e i numeri. E questo porta le autrici all'ipotesi seguente: Lo sviluppo nell'insegnamento, del concetto di area in quanto grandezza permette agli allievi di stabilire le relazioni tra le misure di lunghezza e le misure di area.

E ancora secondo Rouche, si arriva alla misura solo quando si rapportano tutte le grandezze ad una grandezza-unità: Questo rapporto si esprime allora con un numero positivo: la misura della grandezza.

In Marchini (1999, pag. 28) viene messo in evidenza come le due fasi del *confrontare* e del *misurare*, vadano distinte, in quanto le competenze necessarie sono diverse e utilizzano livelli di astrazione ben distinti.

Tenendo conto tali ordini di considerazioni, il gruppo di lavoro si è proposto di cercare di rispondere alle due domande seguenti:

1 – *Fra i problemi del RMT quali possono essere utilizzati in classe per avviare la costruzione del concetto di area?*

2 – Quali sono le condizioni didattiche più opportune per utilizzare fattivamente tali problemi?

## 2. MODALITÀ DEL LAVORO DI GRUPPO

- 1) Rilettura degli enunciati e delle analisi a priori relative a 5 problemi proposti dagli animatori, per cercare di evidenziare le diverse strategie di risoluzione e le conoscenze che tali problemi possono mobilitare.
- 2) Messa in comune delle osservazioni e tentativo di dare una risposta alla domanda 1
- 3) Discussione atta a cercare di dare una risposta alla domanda 2
- 4) Definizione di una sperimentazione

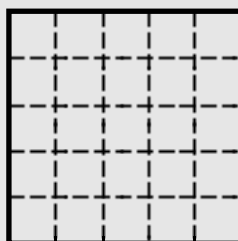
### 2.1 Cinque problemi del RMT

Fra i problemi delle diverse prove del RMT, abbiamo scelto quelli che ci sembrano i più adatti all'approccio al concetto di area a partire da grandezze e al far eventualmente emergere, per affrontarlo di petto, il conflitto area-perimetro, consci del fatto che, in letteratura (ex: Douady, Perrin-Glorian, 1989, Jaquet, 2000) è ormai chiaro che un'identificazione troppo precoce tra grandezze e numeri favorisce la confusione fra le diverse grandezze in gioco (in questo caso: perimetro e area).

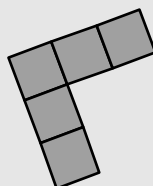
**LA SFIDA** (Cat. 3, 4, 5) 11° RMT-Finale, n. 4

Anna vuole sfidare Giorgio e gli dice :

«Vincerà quello fra noi due che riuscirà a sistemare in questo quadrato



... il maggior numero di pezzi di questo tipo:



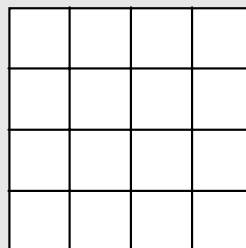
senza metterli uno sull'altro»

**E voi, quanti pezzi riuscite a sistemare nel quadrato?**

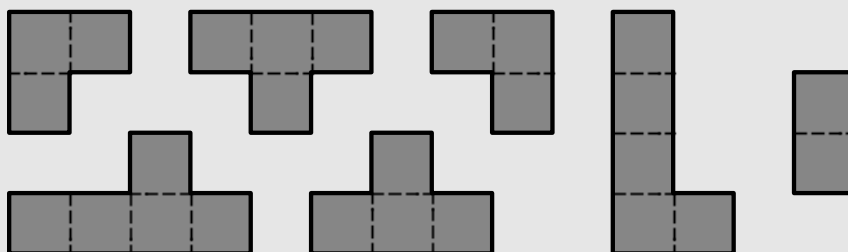
**Disegnate con precisione la vostra soluzione (indicando chiaramente i pezzi).**

**QUADRATO DA RICOPRIRE** (Cat. 3, 4, 5) 12° RMT I prova, n. 5

Gianluca vuole ricoprire interamente questo quadrato:



con dei pezzi scelti fra quelli disegnati sotto:



Gianluca vuole utilizzare il minor numero possibile di pezzi.

**Con quali pezzi potrà ricoprire il suo quadrato?**

**Disegnate le vostre soluzioni in modo che si vedano bene i vari pezzi.**

**IL GIARDINO DEL SIGNOR TORQUATO** (Cat. 3, 4)

8° RMT, I prova, n. 6

Questo è il giardino del signor Torquato:

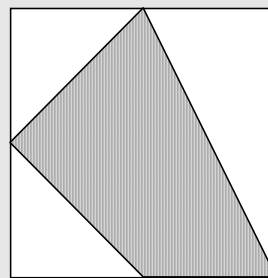
Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

*Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:*

*“Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?”*

**E voi che cosa ne pensate?**

**Spiegate la vostra risposta.**



**IL COPRILETTO DELLA NONNA** (Cat. 3, 4) 11° II prova, n. 3

La nonna ha confezionato un copriletto rettangolare e formato da quadrati della stessa grandezza.

Se si contano sul lato più corto i quadrati sono 15, se si contano sul lato più lungo sono 22.

Ci sono quadrati rosa e quadrati celesti. Con i quadrati celesti la nonna ha formato il bordo mentre l'interno è tutto rosa.

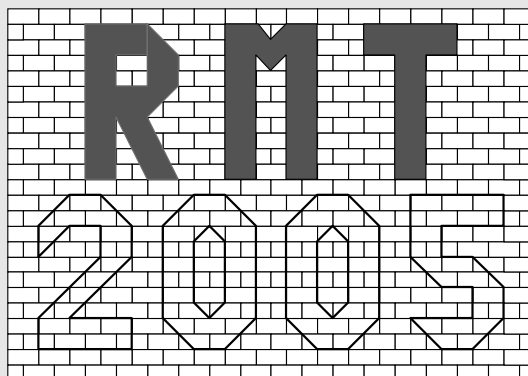
**Quanti quadrati rosa ci sono nel copriletto della nonna?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

**RMT 2005** (Cat. 3, 4) 13° RMT I prova, n. 2

Sul muro della scuola è stata pitturata la parte interna delle lettere R, M e T, preparate per la prossima finale del Rally Matematico Transalpino. Rimane da dipingere la parte interna delle quattro cifre del 2005.

Sofia dipinge il «2» e il primo «0». Mauro dipingerà l'altro «0» e il «5».



**Chi userà più pittura?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

**2.2 Osservazioni comuni sui cinque problemi proposti**

Il gruppo si suddivide in tre sottogruppi e analizza i problemi proposti al fine di individuarne le eventuali potenzialità per quanto riguarda l'introduzione del concetto di area. L'esame dei problemi si avvale sia dell'analisi a priori, che di quella a posteriori, a partire da dati sui risultati ottenuti dalle varie classi impegnate a suo tempo nella gara e ancora con l'ausilio di elaborati delle sezioni di Cagliari e Genova.

### 2.2.1 *La sfida*

Questo problema si presta ad essere usato nelle classi per costruire l'idea di area.

Si tratta infatti di fare un confronto fra “oggetti” della stessa specie: in questo caso quadretti. E la fase di confronto fra grandezze è quella che deve precedere, da un punto di vista didattico, la fase della misura.

Il gruppo ritiene molto importante la presenza, nella soluzione, di 5 quadretti bianchi. Non è possibile, infatti, ricoprire tutto il quadrato. Quei quadretti bianchi possono far riflettere gli alunni sul fatto che “esiste” anche ciò che non si ricopre o che non si può misurare e contare. L'analisi degli elaborati della gara conferma questa ipotesi. Uno degli elaborati mostra delle  $x$  tracciate su ognuno dei 5 quadretti non ricoperti.

### 2.2.2 *Quadrato da ricoprire*

Questo problema si presta ad essere utilizzato nelle classi al fine di costruire l'idea di area. Il gruppo ritiene importante la duplice possibilità di scelta dei pezzi con cui si può ricoprire tutto il quadrato. La scelta può avviare all'idea di una diversa unità di ricoprimento e successivamente all'uso di una diversa unità misura.

### 2.2.3 *Il giardino del signor Torquato*

Il problema è strutturato in modo tale da poter essere utilizzato per la costruzione del concetto di area, ma non in una fase iniziale. A differenza dei precedenti non presenta griglie o quadrettature che possano facilitare gli allievi. Questi devono immaginare loro personali strategie risolutive. Non possono contare o misurare. Devono “immaginare”, “vedere” la possibile partizione che si può operare tra le due parti del piano ed arrivare alla loro “misura” attraverso il confronto o meglio alla loro sovrapposizione.

D'altra parte, la sua strutturazione può anche mettere in luce, ancora una volta, il conflitto area/perimetro, come ben evidenziato in Jaquet (2000).

### 2.2.4 *Il coprietto della nonna*

I tre sottogruppi si trovano d'accordo nel considerare il problema “Il coprietto della nonna” come un “buon” problema ai fini della gara, ma che non si presta in maniera significativa alla costruzione del concetto di area, in quanto sembra far emergere in maniera troppo forte e prematura, il conflitto area/perimetro, fin dalla sua formulazione.

Non c'è confronto fra area ed area, ma fra area e un contorno che gli allievi possono vivere come perimetro. L'analisi degli elaborati a disposizione conferma questa conclusione.

Il problema potrebbe peraltro essere usato in classe in una fase di verifica relativa alla acquisizione del concetto di area, rispetto alla “gestione” dei 4 quadretti d'intersezione delle strisce.

### 2.2.6 RMT 2005

Questo problema si presta ad essere introdotto e usato in classe per le molteplici problematiche che induce. L'analisi a priori del problema mostra come esso sia stato concepito con un obiettivo didattico avente l'intenzione evidente di fare emergere la misura ad un livello scolastico in cui le nozioni ad esse connesse sono in fase di approccio, senza alcun formalismo né regola istituzionalizzati. (Grugnetti, Jaquet, 2006)

Gli allievi devono rendersi conto che la quantità di pittura dipende dalla grandezza delle superfici da ricoprire e che è necessario trovare un modo per confrontarle: per ricoprimento e ritaglio, con pavimentazioni con una o svariate forme, in caso di ricorso ad una mattonella unità, per conteggio. È necessario in sostanza trovare una unità di misura comune.

Un aspetto non secondario è anche il rendersi conto che è inutile calcolare l'area delle cifre «0» e la presa di coscienza di tale aspetto fa appello ad una regola di equivalenza, comunque in generale intuitiva per allievi di 8, 9 anni. (Grugnetti et al., in questi Atti)

Il problema, come l'analisi a posteriori ha evidenziato, può anche portare alla luce difficoltà e conflitti cognitivi importanti come, ad esempio il conflitto area/perimetro o il considerare il numero dei "pezzi" al di là della loro forma.

## 3. SULLE MODALITÀ DI LAVORO IN CLASSE

Il gruppo reputa importante prevedere e predisporre una fase di sperimentazione dei quattro problemi ritenuti utili per la costruzione del concetto di area, tenuto conto delle osservazioni fatte per ciascuno di essi.

I membri del gruppo operano a livello di scuola primaria e secondaria di primo grado.

Per quel che riguarda la scuola primaria, la sperimentazione può essere prevista, almeno per certi problemi, dalla prima alla quinta. Per quanto riguarda la scuola secondaria di primo grado si sperimenterà in seconda media.

Laddove sia possibile somministrare e lavorare con tutti e quattro i problemi, ne viene deciso l'ordine di somministrazione, che tiene conto delle potenzialità e del diverso grado di difficoltà di ciascuno di essi:

1. La sfida.
2. Il quadrato da ricoprire.
3. RMT 2005.
4. Il giardino del signor Torquato.

### 3.1 Un modello comune di rilevazione di alcuni dati

È stata messa a punto una scheda di riferimento, con la possibilità di rapportarvi nelle sue linee essenziali, del tipo seguente:

- Sperimentatore: Nome e cognome	
È l'insegnante della classe (rispondere sì o no)	o
È "ospite" sperimentatore (rispondere sì o no)	o
- Classe	
- N. allievi	
- Storia della classe in rapporto alla problematica dell'area:	
Introdotta l'idea in precedenza	o (rispondere sì o no)
Se sì, come e in quali occasioni	
- A partire dalla quarta elementare segnalare se la classe ha partecipato al RMT e per quante edizioni	
- Metodologia:	
Lavoro individuale oppure lavoro a coppie, o ancora a gruppi di 3 o 4 allievi	
- Dettagli sulla discussione che segue il lavoro a gruppi (o il lavoro individuale), discussione nell'ambito della quale i gruppi dovrebbero "difendere" la propria strategia di risoluzione	
- Sequenza dei quattro problemi scelti per la sperimentazione	
- Segnalazione di errori, difficoltà e conoscenze costruite o mobilitate	

### 3.2 La fase sperimentale

la fase sperimentale, cominciata alla fine di ottobre 2005, è ancora in corso, e vede implicate 13 classi, di cui 1 di seconda media e le altre di scuola primaria:

1 di prima, 3 di seconda, 3 di terza, 3 di quarta e 2 di quinta.

In tutte le classi si pensa di privilegiare il lavoro a gruppi, seguito da una fase di messa in comune e di discussione a classe intera.

Per il momento non è possibile essere esaustivi circa i risultati della sperimentazione. Possiamo comunque fare alcune considerazioni.

In prima e seconda elementare non vengono proposti tutti e quattro i problemi, per non bruciare tappe di apprendimento importanti. Si è ritenuto che i primi due potessero essere proposti a tale livello scolastico, tenendo anche presente che si inseriscono in un ambiente nel quale l'avvio alla comprensione dello 'spazio' è svolto attraverso:

giochi col corpo e con gli oggetti presenti in aula ed in palestra;

esecuzione di impronte, ricalco, disegno di forme con l'uso di oggetti reali;

giochi per la comprensione di confine, regione interna ed esterna;

riempimento con coloritura e/ o con tessere colorate,

o ancora

l'uso del tangram "classico" o di un tangram particolare in tre pezzi (Bisso, 2004, 2005; Montis et al., 2003).

La forma ad "elle" dei pezzi del problema *La sfida*, che "mette in crisi" i bambini si rivela salutare perché induce il passaggio dal numero di quadretti alla necessità di rispettare la forma.

Un bambino di una seconda elementare (di una delle coppie di quella classe che ha trovato la soluzione ottimale) spiega che se il pezzo fosse stato "tutto dritto" il lavoro sarebbe stato molto più semplice e si sarebbero potuti sistemare 5 pezzi.

Arianna, di un terza elementare dice: *Allora vince la posizione sul numero. Il numero [di quadretti] è importante, ma qui diventa più importante come sono messi i quadretti.*

La risoluzione del problema *Quadrato da ricoprire* ha evidenziato, almeno fino alla terza elementare, maggiori difficoltà rispetto al problema precedente. In effetti occorre tener conto delle due condizioni poste dal problema ed è necessario operare una scelta fra diversi pezzi dopo aver fatto alcune considerazioni preliminari (sistemazione, in primis, dei pezzi più grandi e passaggio attraverso il registro numerico per rendersi conto della equiestensione per somma).

In merito al problema *RMT 2005*, di cui si parla ampiamente in Grugnetti et al. (in questi atti), la fase sperimentale è appena cominciata, ma l'uso di questo problema in classe, con l'importante fase di messa in comune e di discussione sembra offrire la possibilità di portare alla luce difficoltà ed ostacoli, come segnalato al punto 2.2.6, sui quali gli alunni possono intervenire costruttivamente. Dall'attività in una quarta:

*Durante la messa in comune tutti i gruppi, tranne il quinto che ha consegnato il lavoro dopo 25 minuti, dicono che è stato difficile risolvere il problema, perché bisognava mettere assieme i quadretti e poi perché era "complicato" scrivere come si era giunti alla soluzione.*

*Lo sperimentatore [che non è l'insegnante della classe] chiede ad un rappresentante del gruppo 2 di esprimere come hanno fatto a trovare la soluzione e l'allievo dice che hanno provato a misurare il contorno del 2 e del 5 (un'altra componente del gruppo dice "lo zero non l'abbiamo misurato perché è uguale").*

*Lo sperimentatore pone il problema alla classe: "Andava bene misurare?"*

*Tre membri del gruppo 2 e altri due allievi rispondono affermativamente. Uno di questi ultimi motiva la sua risposta dicendo che "misurare il contorno è come contare i quadretti".*

*A questo punto un altro allievo (del gruppo 3) dice "Il contorno non c'entra, c'entrano i quadretti. Le figure possono avere lo stesso contorno, ma lo spazio in mezzo può essere diverso".*

*Un'allieva esce allora alla lavagna e presenta due figure con lo stesso perimetro ma con area diversa e un'altra conclude "Quindi contorno e quadratini non sono la stessa cosa".*

*Alla domanda dello sperimentatore se per la pittura era più giusto guardare il contorno o i quadratini un allievo risponde "I quadratini perché si pittura dentro e non fuori. La pittura va sui rettangolini".*

*Successivamente un rappresentante del gruppo 3 presenta il suo metodo basato sul confronto dei ritagli e uno del gruppo 5 quello dei mattoni colorati.*

*Per concludere la classe conviene che per trovare la soluzione era fondamentale capire che “la pittura andava sui quadratini e non sul contorno” e poi “bisognava contare bene (con attenzione) i rettangolini”.*

In merito al problema *Il giardino del signor Torquato*, così come in merito all’intera sperimentazione si dirà, in modo esaustivo, in successivi interventi, presumibilmente nel corso del prossimo convegno dell’ARMT che si terrà a Parma nell’ottobre 2006.

#### **4. QUALCHE OSSERVAZIONE A GUIA DI CONCLUSIONE**

Pensiamo che i quattro problemi presi in esame non siano i soli problemi del ricco cantiere del RMT utilizzabili per lo sviluppo dell’argomento area. Ne stiamo analizzando altri, di cui in successivi interventi diremo, ma pensiamo anche che sia necessario introdurre in classe, ma anche nel RMT, problemi che coinvolgano figure curvilinee. E questo può consentire di costruire la nozione di misura, dell’area per esempio, senza ricorrere necessariamente alle unità convenzionali, aprendo la strada al grande capitolo dell’approssimazione di cui il concetto di area è certamente debitore.

#### **BIBLIOGRAFIA**

- Bisso, C.: 2004, ‘Geometria... e dintorni’, *L’educazione Matematica*, n.3, ed. CRSEM, 1-8.
- Bisso, C.: 2005, ‘Geometria...e dintorni: in classe seconda, ripartiamo dal “tre pezzi”!’, *L’educazione Matematica*, n.2, ed. CRSEM, 1-7.
- Douady R., Perrin-Géorian M-J, 1989, Un processus d’apprentissage du concept d’aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics* **20**, 387-424.
- Grugnetti, L., Bisso, C., Pretto, M., Iesu, N., Polo, M., Tanda, M. F.: 2006 ‘Aspetti didattici della “argomentazione” nei problemi del RMT’, in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.) *RMT : des problèmes à la pratique de la classe/RMT: dai problemi alla didattica quotidiana, Actes des journées d’études sur le Rallye mathématique transalpin*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, ARMT, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, IPRASE Trentino,120-134.
- Grugnetti, L., Jaquet, F. : 2005, ‘Problemi da risolvere con materiale manipolativo/Problèmes à résoudre par manipulation’, *L’educazione Matematica*, Anno XXVI, Serie VIII, Vol. 1, n. 1, 36-48.
- Grugnetti L., Jaquet F. : 2006, ‘D’un concours de mathématiques par classes à la formation des maîtres’, in *XXXII<sup>e</sup> Colloque COPIRELEM des Professeurs et des Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres*, Section Communications sur CD (communication D6, 1-22).
- Jaquet F., 2000, Il conflitto area-perimetro, *L’educazione Matematica*, ed. CRSEM (Prima parte: Anno XXI - Serie VI - Vol 2, n. 2, 66-77, seconda parte: n. 3, 126-143).
- Marchini C., 1999, Il problema dell’area, *L’educazione Matematica*, Anno XX-Serie VI- Vol. 1, n. 1, Ed CRSEM, 27-48.
- Montis, AM., Mallocci, P., Polo, M.: 2003, ‘Congettura e argomentazione nella costruzione dei concetti di equiestensione e isoperimetria: un percorso didattico dalle prima alla quinta elementare’, *L’educazione Matematica*, n. 3, ed. CRSEM, 1-12.
- Rouche, N.: 1992, *Le sens de la mesure*, Formation Didier Hatier.